Владимир Иванович Черепанов

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Уральского университета, Соросовский профессор

СИММЕТРИЯ И ПРИНЦИПЫ ИНВАРИАНТНОСТИ В ФИЗИКЕ

Мы с готовностью воспринимаем лишь те физические теории, которые обладают изяществом.

А. Эйнштейн

Слово «симметрия» («symmetria») имеет греческое происхождение и означает «соразмерность». В повседневном языке под симметрией понимают чаще всего упорядоченность, гармонию, соразмерность. Гармоничная согласованность частей и целого является главным источником эстетической ценности симметрии [1-4]. Кристаллы издавна восхищали нас своим совершенством, строгой симметричностью форм. Симметричные мозаики, фрески, архитектурные ансамбли будят в людях чувство прекрасного, музыкальные и поэтические произведения вызывают восхищение именно своей гармоничностью. Таким образом, можно говорить о принадлежности симметрии к категории прекрасного.

Научное определение симметрии принадлежит крупному немецкому математику Герману Вейлю (1885-1955), который в своей замечательной книге «Симметрия» [1] проанализировал также переход от простого чувственного восприятия симметрии к ее научному пониманию. Согласно Вейлю, под симметрией следует понимать неизменность (инвариантность) какого-либо объекта при определенного рода преобразованиях. Можно сказать,что симметрия есть совокупность инвариантных свойств объекта. Например, кристалл может совмещаться с самим собой при определенных поворотах, отражениях, смещениях. Многие животные обладают приближенной зеркальной симметрией при отражении левой половины тела в правую и наоборот. Однако подчиняться законам симметрии может не только материальный, но и, к примеру, математический объект. Можно говорить об инвариантности функции, уравнения, оператора при тех или иных преобразованиях системы координат. Это в свою очередь позволяет применять категорию симметрии к законам физики. Так симметрия входит в математику и физику, где она также служит источником красоты и изящества.

Постепенно физика открывает все новые виды симметрии законов природы: если вначале рассматривались лишь пространственно-временные (геометрические) виды симметрии, то в дальнейшем были открыты ее негеометрические виды (перестановочная, калибровочная, унитарная и др.). Последние относятся к законам взаимодействий, и их объединяют общим названием «динамическая симметрия».

Принципы инвариантности играют очень важную роль в современной физике: с их помощью обоснованы старые и предсказаны новые законы сохранения, облегчено решение многих фундаментальных и прикладных задач и, что особенно важно, удалось добиться первых успехов на пути объединения фундаментальных взаимодействий. Эти принципы обладают большой общностью. Выдающийся американский физик-теоретик Ю. Вигнер [5] отметил, что эти принципы относятся к законам природы так же, как законы природы относятся к явлениям, т.е. симметрия «управляет» законами, а законы «управляют» явлениями. Если бы не было, например, инвариантности законов природы относительно смещений в пространстве и времени, то вряд ли наука вообще смогла бы устанавливать эти законы.

Читателям, интересующимся общенаучным и философским значением симметрии, можно порекомендовать уже упоминавшуюся книгу Г. Вейля [1] , а также ряд статей и лекций Ю. Вигнера, собранных в его книге «Этюды о симметрии» [5]. На широкий круг читателей рассчитана брошюра А. Компанейца [6]. Для более подготовленных читателей рекомендуем учебную [7-9] и монографическую [10-12] литературу.

Целью настоящей статьи является краткое популярное изложение основных понятий теории симметрии и принципов инвариантности в современной физике.

1. Пространственно-временные виды симметрии

Наиболее наглядным видом симметрии является пространственная (геометрическая) симметрия, которая имеет ряд разновидностей: вращательная, зеркальная, трансляционная и др. Например, шар (или сфера) обладает полной вращательной симметрией, т.е. вращение шара вокруг любой оси, проходящей через его центр, на любой угол φ не меняет положения шара в пространстве; конус имеет полную одноосную симметрию; куб - три оси симметрии 4-го порядка (с поворотами на углы, кратные $\frac{2\pi}{4}$), шесть осей симметрии 2-го порядка ($\varphi = \frac{2\pi}{2}$) и четыре оси симметрии 3-го порядка ($\varphi = \frac{2\pi}{3}$) (см. рис.). Шар, конус и куб имеют еще плоскости симметрии (первые два - бесконечное число, а куб - девять плоскостей симметрии).

Особым видом симметрии является инверсионная симметрия, при которой каждая точка объекта с радиус-вектором $\vec{r}$ преобразуется в точку с радиус-вектором $-\vec{r}$ (при этом радиус-вектор исходит из центра инверсии).

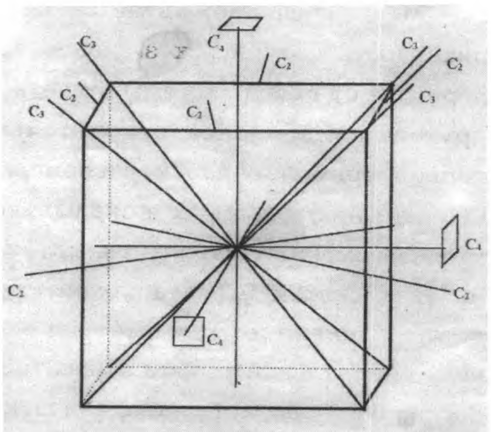

Рисунок. Оси симметрии куба

Заметим, что вместо преобразований самого объекта можно производить соответствующие преобразования системы координат: если после преобразования объект в новой системе координат занимает то же положение, что и в старой, то такое преобразование координат есть преобразование симметрии объекта. Такое определение операций симметрии удобнее, когда мы имеем дело с математическими объектами. Если математический объект (функция, оператор, уравнение) остается инвариантным при определенном преобразовании координат, то это преобразование считается преобразованием (операцией) симметрии этого объекта. Например, функции $f = f(x^2 + y^2 + z^2)$ и $\varphi(x^2 + y^2)$ обладают в трехмерном пространстве: первая - сферической, а вторая - аксиальной симметрией.

Совокупность операций симметрии любого объекта образует **группу симметрии** этого объекта, основное свойство элементов которой состоит в том, что последовательное применение двух операций симметрии $\hat{g}_1$ и $\hat{g}_2$ есть опять-таки операция симметрии $\hat{g}_3$ этого объекта (называемая произведением этих операций $\hat{g}_3 = \hat{g}_1 \times \hat{g}_2$). Кроме того, для каждой операции симметрии $\hat{g}$ в этой же совокупности имеется обратная операция $\hat{g}^{-1}$, переводящая объект в первоначальное положение, т.е. $\hat{g}\hat{g}^{-1} = E$ - тождественное преобразование. Выполняется также закон ассоциативности $(\hat{g}_1\hat{g}_2)\hat{g}_3 = \hat{g}_1(\hat{g}_2\hat{g}_3)$. Заметим, что в общем случае $\hat{g}_1\hat{g}_2 \neq \hat{g}_2\hat{g}_1$ (напр., если это повороты вокруг разных осей). Если же для всех элементов группы $\hat{g}_1\hat{g}_2 = \hat{g}_2\hat{g}_1$, то группа называется **абелевой**. Часть элементов группы, вновь обладающая всеми свойствами группы, называется **подгруппой**.

Вращательные операции симметрии шара (сферы) образуют группу вращений $\mathbf{R}$, конуса - группу $\mathbf{C}_\infty$, куба - группу O.

Все элементы группы симметрии можно разбить на классы сопряженных элементов, отнеся в каждый класс повороты вокруг эквивалентных осей симметрии или отражения в эквивалентных плоскостях симметрии (эквивалентными называются оси или плоскости, которые могут быть переведены друг в друга с помощью каких-либо операций симметрии из этой же группы). Например, группа симметрии куба O имеет 5 классов: $E, 6C_4, 3C_4^2, 6C_2, 8C_3$.

Из сказанного ясно, что можно говорить о симметрии физических законов, коль скоро последние выражаются математическими уравнениями. Например, закон всемирного тяготения гласит, что сила взаимного притяжения двух тел пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Следовательно, сила притяжения не зависит от положения этой пары в пространстве, а только от расстояния между телами. Это означает, что данный закон инвариантен относительно переноса или вращения этой пары тел в целом (или, с математической точки зрения, относительно переноса или вращения системы координат). Это не было бы так, если бы пространство не было однородным и изотропным. Такая переносная (трансляционная) симметрия является еще одной разновидностью пространственной симметрии.

Другой разновидностью симметрии выступает инвариантность физических законов относительно сдвигов во времени. Правда, согласно представлениям современной космологии, в истории развития Вселенной, по-видимому, были периоды радикальных изменений, однако эти изменения объяснимы с позиций более общих законов, остающихся неизменными с течением времени.

Менее очевидной является инвариантность физических законов при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой прямолинейно и равномерно. Однако эксперименты показывают, что невозможно установить, которая из этих систем отсчета покоится, а которая движется. Этот факт лег в основу специальной теории относительности, согласно которой физические законы должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Последние включают специальные преобразования не только координат, но и времени. Эту разновидность симметрии физических законов также можно отнести к разряду геометрических (имея в виду четырехмерную геометрию Минковского).

Выше уже говорилось об инверсионной симметрии. Но обладают ли такой симметрией физические законы? Долгое время считалось, что обладают, пока опыты китаянки Цзяньсюн Ву (США) по изучению β -распада ориентированных в магнитном поле ядер кобальта ^{60}Co , проведенные в 1957 г., не показали, что на слабые взаимодействия[1] инверсионная симметрия не распространяется. Однако для большинства физических законов инверсионная симметрия соблюдается.

Подчеркнем следующее важное обстоятельство. Если какое-либо уравнение инвариантно относительно определенных операций симметрии, то это не означает, что все его решения обладают такой же симметрией (хотя для части решений это возможно). Дело в том, что на формирование решений влияют еще начальные и граничные условия. Например, несмотря на то, что гравитационное поле Солнца можно считать сферически симметричным, планеты движутся вокруг Солнца не по круговым, а по эллиптическим траекториям. Другой пример — кристалл, инвариантный при дискретных трансляциях (кратных постоянным решетки), хотя электрические силы, действующие между его атомами, не меняются при любых смещениях кристалла в целом. Симметрия материальных структур, образуемых за счет фундаментальных взаимодействий, может быть намного ниже, чем симметрия последних. Учитывая это, можно говорить о **структурной симметрии** материальных объектов. Априорное определение возможных видов симметрии устойчивых материальных структур часто представляет собой трудную проблему.

Между тем структурная симметрия равновесного расположения атомов в молекулах или кристаллах играет важную роль в формировании решений основного уравнения квантовой механики (уравнения Шредингера) для состояний более легкой подсистемы электронов в поле тяжелых ядер атомов. Операции структурной симметрии могут переставлять местами только однотипные атомы, не меняя расположения структуры в пространстве.

К группам структурной симметрии относятся, например, точечные группы[2] симметрии молекул, пространственные и точечные кристаллографи-

---

[1] В природе существуют четыре известных в настоящее время фундаментальных взаимодействия: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое.

[2] Точечной группой симметрии называют группу, включающую только такие операции симметрии, которые оставляют на месте хотя бы одну точку пространства.

ческие группы симметрии. Известны 32 точечные и 230 пространственных групп симметрии кристаллов. Первые описывают симметрию окружения для той или иной позиции в кристалле. Вторые, кроме поворотов вокруг осей симметрии, отражений в плоскостях симметрии, инверсионных преобразований кристалла, включают еще дискретные трансляции кристалла. 32 точечные кристаллографические группы были выведены Гесселем в 1830 г., а 230 пространственных групп — известным русским кристаллографом Е. Федоровым и немецким ученым А. Шенфлисом в 1891 г. Интересно, что это было сделано еще до открытия атомной структуры кристаллов.

2. Представления групп симметрии и их роль в квантовой теории

Несмотря на то, что симметрия уравнения, как отмечалось выше, не всегда присуща решениям этого уравнения, она тем не менее существенно влияет на характер решений. Чтобы понять, в чем заключается это влияние, поясним сначала понятия приводимых и неприводимых представлений групп симметрии.

Рассмотрим преобразование декартовых координат x,y,z и их произведений x^2,y^2,z^2,yz,xz,xy под действием операций группы O (см. выше).

Нетрудно заметить, что x,y,z преобразуются под действием операций группы O сами через себя[1]. Вторая совокупность также обладает этим свойством, но в отличие от первой из исходных x^2,y^2,z^2,yz,xz,xy можно составить новые линейные комбинации, которые разбиваются на подсовокупности, преобразующиеся независимо друг от друга. Говорят, что совокупность первого типа образует базис **неприводимого представления** Γ_4 группы O, а совокупность второго типа - базис **приводимого представления** Γ, которое , однако, раскладывается на сумму неприводимых:

$$\varphi_0 = x^2+y^2+z^2 \to \Gamma_1,$$

$$\{\varphi_1 = 2z^2 - x^2 - y^2; \varphi_2 = \sqrt{3}(x^2-y^2)\} \to \Gamma_3,$$

$$\{\Psi_1 = yz;\quad \Psi_2 = xz; \Psi_3 = xy;\} \to \Gamma_5,$$

т. е. $\underset{(6)}{\Gamma} = \underset{(1)}{\Gamma_1} + \underset{(2)}{\Gamma_3} + \underset{(3)}{\Gamma_5}$,

где внизу, в скобках, написаны размерности представлений (т.е. числа базисных функций)).

Если обозначить базисные функции представления Γ_α через $\Psi_\mu^{\Gamma_\alpha}$ (где индекс μ нумерует базисные функции), то результат действия операции $\hat{g}$ группы на базисную функцию можно записать в виде:

$$\hat{g}\Psi_\mu^{\Gamma_\alpha} = \sum_{\nu=1}^{f} D_{\nu\mu}^{(\Gamma_\alpha)}(g)\Psi_\nu^{\Gamma_\alpha},$$

где f - размерность представления Γ_α. Представления группы фактически образуют матрицы $\mathbf{D}^{(\Gamma_\alpha)}(g)$, ибо, как можно легко показать, они имеют

[1] Это означает, что преобразованные координаты выражаются через линейные комбинации исходных координат.

тот же закон умножения, что и элементы группы $\hat{g}$, которые они представляют. Каждой группе принадлежит бесконечно много представлений, однако число неприводимых представлений всегда равно числу классов. Например, группа O включает 5 классов: $E, 6C_4$, $3C_4^2, 6C_2, 8C_3$ и, следовательно, имеет 5 неприводимых представлений, которые обозначают $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$.

Неприводимые представления групп симметрии играют важнейшую роль в квантовой физике. Решение уравнения Шредингера для стационарного случая

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \qquad (2)$$

(где $\hat{H}$ - оператор Гамильтона, Ψ - волновая функция системы, E - значение полной энергии) при определенных граничных условиях приводит к набору разрешенных значений энергии (энергетическому спектру) и волновых функций. В случае существования нескольких линейно независимых волновых функций для одного и того же энергетического уровня говорят о **вырождении** этого уровня, а число независимых волновых функций (состояний), принадлежащих этому уровню, называют **кратностью вырождения**. Если уравнение (2) инвариантно относительно преобразований некоторой группы симметрии G_H, то волновые функции, являющиеся решениями этого уравнения и принадлежащие одному энергетическому уровню, будут обязательно составлять базис неприводимого представления группы G_H. Это утверждение составляет содержание теоремы Вигнера, имеющей, правда, оговорку о случайных вырождениях, на которой мы останавливаться не будем.

Отсюда следует, что энергетические уровни квантовой системы можно классифицировать по неприводимым представлениям группы симметрии. Иными словами, симметрия вызывает объединение квантовых состояний в группы (мультиплеты), относящиеся к энергетическим уровням, каждый из которых характеризуется неприводимым представлением группы симметрии.

Использование представлений групп симметрии позволяет очень просто устанавливать так называемые правила отбора для квантовых переходов между энергетическими уровнями под действием разного рода нестационарных возмущений (напр., под действием света), что очень важно для оптической спектроскопии. Кроме того, применение представлений групп симметрии существенно облегчает рассмотрение влияний стационарных внешних воздействий (электрических, магнитных полей, механических напряжений и т.д.), к примеру, на оптические спектры квантовых систем. Дело в том, что “включение” внешнего воздействия изменяет симметрию задачи (обычно симметрия понижается от группы G_H до одной из ее подгрупп G'). Между тем, представление Γ, неприводимое в группе G_H, может стать приводимым в подгруппе G':

$$\Gamma=\sum_j c_j \Gamma_j \ , \qquad (3)$$

что означает расщепление энергетического уровня типа Γ на ряд подуровней, характеризуемых неприводимыми представлениями Γ_j группы G'. Это влечет за собой расщепление соответствующих линий, полос в оптическом спектре (так называемые эффекты Штарка, Зеемана, пьезоспектроскопические явления и т.д.). Проводя разложение (3), мы сразу узнаем, на сколько подуровней и какого типа расщепится данный уровень. Соответствующие разложения легко проводятся с использованием таблиц характеров неприводимых представлений групп симметрии (см. [7-9]).

3. Негеометрические виды симметрии

Физические законы могут обладать свойствами симметрии иного рода, нежели рассмотренные выше. Например, в квантовой теории важную роль играет так называемая **перестановочная симметрия**, т.е. инвариантность уравнения Шредингера относительно перестановок одинаковых частиц[1]. Важнейшим следствием перестановочной симметрии является существование двух классов частиц: бозонов и фермионов, существенно различающихся по своим свойствам. К первым относятся частицы с целым спином (в единицах $\hbar=\frac{h}{2\pi}$, где h - постоянная Планка), а ко вторым - с полуцелым.

Волновые функции двух состояний системы частиц, различающихся перестановкой $\hat{p}$ одинаковых частиц, физически эквивалентны, т.е. функции Ψ и $\hat{P}\Psi$ могут отличаться только несущественным фазовым множителем:

$$\hat{P}\Psi=\exp(i\alpha)\Psi \ . \qquad (4)$$

Отсюда, с одной стороны, $\hat{P}^2\Psi=\exp(2i\alpha)\Psi$, а с другой - $\hat{P}^2=1$, т.е. $\exp(2i\alpha)=1$. Тогда $\exp(i\alpha)=\pm 1$, и (4) запишется:

$$\hat{P}\Psi=\pm\Psi \ .$$

Следовательно, волновая функция системы одинаковых частиц должна быть симметричной $\hat{P}\Psi=+\Psi$ (бозоны) или антисимметричной $\hat{P}\Psi=-\Psi$ (фермионы).

Выдающийся швейцарский физик-теоретик Вольфганг Паули (1900-1958) установил связь перестановочной симметрии со спином частиц: частицы с целым спином - бозоны, а с полуцелым - фермионы. Он же показал, что фермионы должны подчиняться принципу запрета (широко известному сейчас как принцип Паули): два фермиона не могут находиться в

[1] Уравнения классической механики также обладают перестановочной симметрией, но там она не влечет за собой каких-либо важных следствий.

одном и том же состоянии. Очевидно, что перестановка фермионов в одном и том же состоянии не меняла бы волновую функцию $\hat{P}\Psi = \Psi$, но, с другой стороны, ввиду антисимметричности волновой функции системы фермионов $\hat{P}\Psi = -\Psi$. Следовательно, $\Psi = -\Psi = 0$, т.е. такие состояния не могут существовать.

Принцип Паули, как известно, служит ключом к объяснению периодического закона Д.И. Менделеева. Если бы не выполнялся принцип Паули, то все электроны любого атома перешли бы в наинизшее по энергии $1s$ – состояние, что привело бы к потере того разнообразия химических свойств атомов, которое наблюдается в природе. Это как нельзя лучше иллюстрирует важное значение перестановочной симметрии.

К не менее значимому виду симметрии можно отнести **калибровочную симметрию** уравнений электродинамики и релятивистской квантовой механики (уравнений Дирака). Суть ее заключается в следующем: если умножение волновой функции на постоянный фазовый множитель $\exp(i\alpha)$ не меняет уравнение Дирака, то умножение ее на переменный фазовый множитель $\exp(i\alpha(x,y,z,t))$ (так называемое **локальное калибровочное преобразование**) приводит к его изменению. В уравнении появляются дополнительные слагаемые, происходящие от дифференцирования $\alpha(x,y,z,t)$ по координатам и времени. Если, однако, постулировать принцип локальной калибровочной инвариантности, то можно скомпенсировать дополнительные слагаемые, вводя взаимодействие с некоторым векторным полем. Последнее по своим свойствам оказывается тождественным электромагнитному полю, которое подчиняется уравнениям Дж. Максвелла. Получается, что уравнения Максвелла можно вывести из принципа локальной калибровочной симметрии! Поэтому электромагнитное поле можно назвать калибровочным полем для электронов. Кванты этого поля (фотоны) являются переносчиками электромагнитного взаимодействия между электронами. Они, как известно, имеют спин, равный 1 (в единицах $\hbar$) и массу покоя, равную 0. Эти два свойства присущи любым калибровочным полям (см. ниже).

Китайский физик Ч.Янг и американец Р. Миллс попытались распространить принцип локальной калибровочной инвариантности на сильные взаимодействия. Для сильных взаимодействий адронов[1] еще в 30-х гг. была установлена глобальная изотопическая инвариантность, основанием для которой послужила возможность объеди-

[1]К адронам относят частицы, подверженные сильным взаимодействиям. Адроны можно разделить на барионы, имеющие полуцелый спин (протон, нейтрон, частицы $\Sigma,\Lambda,\Delta,\Xi,\Omega$ и др.), и мезоны, имеющие целый спин (π, K, ρ, ω и др.).

нить часть адронов в семейства "похожих" частиц. Частицы каждого семейства имеют одинаковые внутренние характеристики: спин, четность, барионный заряд, странность, очарование, красоту (исключая электрический заряд) и примерно одинаковые массы. Такие семейства адронов называют **изомультиплеты**. Наиболее известные из них - изодублет барионов: протон-нейтрон n,p и изотриплет мезонов: π^+, π^0, π^-.

Если вспомнить о релятивистской связи между энергией и массой $E = mc^2$, то частицы одинаковой массы, сходные по своим свойствам с точки зрения сильных взаимодействий, можно рассматривать как одну частицу, находящуюся в разных квантовых состояниях (но с одной и той же энергией). Следовательно, по теореме Вигнера, эти частицы можно отнести к определенному неприводимому представлению группы симметрии сильных взаимодействий. Проблема состоит в том, чтобы правильно определить эту группу симметрии.

Подобно тому, как для атома из двух базисных состояний спина $s = 1/2$ с проекцией спина на выделенное направление $m_S = \pm 1/2$, можно путем векторного сложения спинов построить спиновые мультиплеты с квантовым числом полного спина $S = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\ldots$ (соответственно с мультиплетностью 2S+1=1,2,3,4,5...), возможные изомультиплеты нестранных адронов могут быть найдены из двух базисных состояний u и d с проекциями изоспина $m_T = \pm\frac{1}{2}$ соответственно. Эти изомультиплеты характеризуются квантовым числом полного изоспина T и его (2T+1)-й проекциями $m_T = -T, -T+1, -T+2\ldots+T$. С математической точки зрения, состояния $m_S = \pm\frac{1}{2}$, как и состояния (u, d), образуют базис так называемого фундаментального представления $d^{(\frac{1}{2})}$ группы $SU(2)$ [1], и последовательное перемножение $d^{(\frac{1}{2})} \times d^{(\frac{1}{2})} \times \ldots \times d^{(\frac{1}{2})}$ с последующим разложением на неприводимые представления $D^{(S)}$ (или $D^{(T)}$) дает значения S (или T) в мультиплетах.

Если в случае одной волновой функции ψ глобальное калибровочное преобразование заключается в простом умножении на экспоненциальный множитель $\Psi' = \exp(i\alpha)\Psi$, то для двух состояний глобальное калибровочное преобразование имеет вид:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где матрица коэффициентов a_{ik} обладает специальными свойствами[2]. Набор этих матриц совпадает с известными из теории спиноров матрицами $D^{(\frac{1}{2})}(\varphi, \psi, \theta)$, описывающими преобра-

[1] Группа $SU(2)$ есть группа специальных квадратных унитарных матриц.

[2] Имеется в виду унитарность и унимодулярность матриц.

зования спиновых функций $(\chi_{-\frac{1}{2}},\chi_{+\frac{1}{2}})$ при вращении системы координат, задаваемом углами Эйлера φ,ψ,θ. Поэтому глобальное калибровочное преобразование (5) можно интерпретировать как вращение в некотором внутреннем изоспиновом пространстве.

Однако попытка Ч. Янга и Р.Миллса рассматривать адроны как состоящие из двух фундаментальных частиц u и d не удалась. Двух базисных состояний для построения всех наблюдаемых адронов оказалось недостаточно. Поэтому американские физики М.Гелл-Ман и У.Нейман обратились к группе $SU(3)$ унитарных преобразований трех фундаментальных состояний u,d,s. Эти состояния и сопряженные им $\overline{u},\overline{d},\overline{s}$ М.Гелл-Ман и Дж.Цвейг интерпретировали как действительно элементарные частицы-кварки и антикварки соответственно. Если приписать кваркам дробные электрические заряды ($+\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}$ для u,d,s соответственно, и противоположные по знакам для антикварков $\overline{u},\overline{d},\overline{s}$), а также определенные значения спина , странности, барионного заряда, изоспина и его проекции, то из них можно построить большинство из известных адронов.

Группа $SU(3)$ кроме трехмерных неприводимых фундаментальных представлений имеет ряд неприводимых представлений с размерностями 1, 6,8,10... Это вполне согласуется с существованием синглетов, октетов и декуплетов частиц-адронов с близкими массами и одинаковыми спинами (в пределах каждого мультиплета)[1]. Некоторый разброс значений масс в мультиплетах, как выяснилось позднее, связан с тем, что симметрия $SU(3)_f$[2] на самом деле является приближенной.

В плане классификации адронов успех гипотезы $SU(3)_f$ и кварков был несомненным. Особенно большое впечатление произвело теоретическое предсказание М.Гелл-Маном бариона Ω^-, который заполнил пустое место в одном из декуплетов. Гелл-Ман предсказал также примерную массу этой частицы — 1675 МэВ (в энергетических единицах) и странность $S=-2$. Спустя полтора года эта частица действительно была обнаружена экспериментально с массой 1672 МэВ и странностью $S=-2$. С этого момента классификация адронов на основе приближенной унитарной симметрии $SU(3)_f$ стала общепризнанной, а М.Гелл-Ман в 1969 г. был удостоен Нобелевской премии по физике.

Однако наряду с успехами унитарной классификации адронов возник ряд новых проблем, например, существова-

[1] Отсутствие секстетов (число частиц равно 6) имеет свое объяснение при учете цветовых зарядов кварков.

[2] Индекс f указывает на то, что группа $SU(3)_f$ в данном случае применяется для описания симметрии ароматов (flavour) u,d,s.

ние некоторых барионов, кварковый состав которых (в частности, барионов $\Delta^{++}=(u,u,u);\Delta^{-}=(d,d,d);\Omega^{-}=(s,s,s)$, противоречил принципу Паули, согласно которому в одном и том же состоянии могут находиться не более двух фермионов с противоположными спинами (см. выше). Другая трудность связана с неудачами попыток обнаружения свободных кварков.

Для преодоления первой трудности пришлось ввести еще одну квантовую характеристику кварков, которая может принимать три значения. Эта величина получила название **цветовой заряд** (или просто **цвет**), а три ее значения условно назвали красным, желтым и синим оттенками. Цвет как фундаментальная характеристика кварков был введен российскими учеными Н.Боголюбовым, Б.Струминским и А.Тавхелидзе, а также, независимо от них, - Й.Намбу (США) в 1965 г. Три кварка, входящие в приведенные выше частицы $\Delta^{++},\Delta^{-},\Omega^{-}$, имеют разный цветовой заряд, т.е. находятся в разных состояниях , и потому не нарушается принцип Паули. Комбинация (q_r,q_y,q_b) составляет "бесцветный" синглет. Антикварки имеют антикрасный, антижелтый или антисиний цвета. Барионы состоят из трех кварков разного цвета. Мезоны, состоящие из кварка и одноименного антикварка, также "бесцветны", как и барионы.

Введение цвета привело к открытию еще одного вида симметрии для сильного взаимодействия описываемой вновь группой $SU(3)_C$. Однако в этом случае роль трех фундаментальных состояний играют три цвета, что и отражено индексом c (от "color" — цвет). В отличие от $SU(3)_f$ симметрия $SU(3)_c$ является точной. Последняя включает глобальные калибровочные (унитарные) преобразования цветовых состояний при фиксированных ароматах кварков. Придание статуса локальных этим пробразованиям приводит к калибровочным полям, описывающим сильные взаимодействия между кварками. Эти поля получили название **глюонных** (от "glue" - клей).

Итак, подобно тому, как электрические заряды являются источниками электромагнитного поля, цветовые заряды порождают глюонное поле. Если переносчиками первого являются фотоны, то второго - **глюоны**. И те и другие электрически нейтральны и безмассовы, но глюоны обладают цветовым зарядом. Из свойств группы симметрии $SU(3)_c$ вытекает существование восьми типов глюонов. Наличие цветовых зарядов у них придает сильным взаимодействиям совершенно необычные свойства, проявляющиеся , в частности, в том, что сила взаимодействия между кварками убывает при уменьшении и растет при увеличении расстояния между ними[1]. Это, по-ви-

[1] Следует отметить, что взаимодействие между адронами, которое ранее называлось сильным, на самом деле является остаточным эффектом от взаимодействия кварков, составляющих адроны.

димому, является причиной "пленения" кварков внутри адронов, что и объясняет неудачи попыток обнаружения свободных кварков.

Теория сильных взаимодействий, опирающаяся на представление о цветовых зарядах, получила название **квантовой хромодинамики**. Эта теория практически завершена для малых расстояний между кварками, но для больших расстояний еще имеются трудности.

Тем не менее применение принципов глобальной и локальной унитарной симметрии способствовало существенному продвижению в области классификации адронов и описания сильных взаимодействий. Вместе с тем имеется еще ряд проблем на этом пути. Так, для классификации и описания взаимодействий наиболее тяжелых и короткоживущих адронов (так называемых резонансов) потребовалось ввести еще три кварка, получивших названия c,b,t. Вместе с лептонами кварки образуют три поколения элементарных частиц:

1	2	3	u, d, c, s, t, b — кварки,
u	c	t	
d	s	b	
ν_e	ν_μ	ν_τ	ν_i — нейтрино,
e	μ	τ	e — электрон,
			μ,τ — мезоны

(аналогично следует разбить и античастицы). Имеется теоретическое обоснование того, что число поколений должно исчерпываться тремя. Эти повторения поколений представляют собой главную загадку физики элементарных частиц. Возможно, они вновь указывают на составной характер этих частиц и на новую, более глубокую симметрию.

4. Скрытая симметрия и объединение электромагнитных и слабых взаимодействий

Крупным достижением, полученным на основе принципа локальной калибровочной инвариантности, стало развитие американскими физиками Стивеном Вайнбергом, Шелдоном Глэшоу и пакистанским ученым Абдусом Саламом теории, объединяющей электромагнитное и слабое взаимодействия (авторы этой теории были удостоены Нобелевской премии по физике в 1979 г.).

Они использовали идеи Ч. Янга и Р. Миллса, о которых говорилось выше, дополнив их принципом **нарушенной (скрытой) симметрии** (иначе — принципом спонтанного нарушения симметрии). Прямому применению теории Янга-Миллса к слабым взаимодействиям препятствовал тот факт, что кванты калибровочного поля имеют нулевую массу покоя, что противоречило малому радиусу слабого взаимодействия. Действительно, согласно квантовой теории поля, перенос взаимодействия осуществляется виртуальными частицами, рождающимися на короткое время. Из соотношения неопределенности для энергии - времени $\Delta E \Delta \tau \geq \hbar$ при энергии, требуемой для рождения виртуальной частицы, $\Delta E = m_0 c^2$ (где m_0 - масса покоя частицы, c - скорость света) находим "время жизни" частицы $\Delta \tau \approx \hbar / m_0 c^2$. За это время частица сможет "пробежать" максимальное расстояние $r \approx \Delta \tau c = \hbar / m_0 c$. Следовательно, радиус действия сил связан с массой переносчиков этих сил обратно пропорциональной зависимостью. Если для электромагнитных взаимодействий $m_0 = 0$, $r = \infty$ (дальнодействующие силы), то для слабых взаимодействий $r \approx 10^{-15}$ см (короткодействующие силы), т.е. переносчики слабого взаимодействия должны обладать массой покоя, равной примерно $m_0 \approx 100$ ГэВ (это приблизительно в 100 раз больше массы протона)[1].

Казалось бы, столь разные взаимодействия невозможно объединить в единое поле. Однако С. Вайнберг, Ш. Глэшоу и А. Салам показали, что это не так. Они предположили, что локальная калибровочная симметрия типа $SU(2) \times U(1)$ единого электрослабого взаимодействия в прошлом оказалась спонтанно нарушенной при остывании горячей Вселенной после Большого взрыва. Спонтанное нарушение симметрии $SU(2) \times U(1)$ предположительно произошло в результате фазового перехода в вакууме при температуре $T \approx 10^{15} K$. Следствием этого нарушения и стало разделение единого взаимодействия на слабое и электромагнитное. Математически это выражается в появлении трех массивных частиц - переносчиков слабого взаимодействия W^+, W^-, Z^0 и одной безмассовой - фотона γ, переносящего электромагнитное взаимодействие (все со спином 1), а также одной бесспиновой частицы Хиггса (последняя названа по имени британского физика, открывшего механизм нарушения симметрии).

Теория С. Вайнберга и А. Салама предсказала следующие массы $W^\pm$ - частиц — 82 ГэВ и Z^0 - частицы — 93 ГэВ. В 1983 г. в Женевском объединенном институте ядерных исследований такие частицы зафиксированы и измерены их массы: $m_W = (81 \pm 2)$ ГэВ, $m_Z = (94 \pm 2)$ ГэВ, что хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями. Кроме того, на основе этой теории были объяснены так называемые процессы с нейтральными токами (типа рассеяния нейтрино на нуклонах). Однако частицы Хиггса до сих пор не обнаружены, что вызывает чувство некоторой неудовлетворенности. Возможно, их массы слишком велики (теория пока не может предсказать их массы), чтобы их можно было создать в современных ускорителях частиц.

[1] 1 ГэВ $= 10^3$ МэВ $= 10^9$ эВ.

5. Симметрия и законы сохранения

Существует глубокая связь между симметрией и законами сохранения. Еще Г.Гамель и Э.Нетер показали, что трансляционная симметрия приводит для замкнутой системы к закону сохранения полного импульса, а вращательная симметрия - к закону сохранения полного момента количества движения. Позднее Э.Нетер установила, что каждому виду симметрии отвечает свой закон сохранения. Так, из инвариантности уравнений механики относительно сдвигов во времени вытекает закон сохранения энергии, из калибровочной инвариантности уравнений электродинамики - закон сохранения электрического заряда. Сформулированы законы сохранения и для ряда других физических величин. Некоторые из них выполняются для всех взаимодействий, другие - только для определенного вида взаимодействий. К первым можно отнести закон сохранения барионного заряда (применимость которого ко всем взаимодействиям, впрочем, подвергается сомнению). Ко вторым относятся, например, законы сохранения странности, изоспина, которые строго выполняются для процессов с сильным взаимодействием, но нарушаются для процессов со слабым взаимодействием.

Выше мы упоминали об инверсионной симметрии. Какой же закон сохранения отвечает этой симметрии? Если потребовать, чтобы волновые функции двух состояний $\Psi(x,y,z,t)$ и $\Psi(-x,-y,-z,t)$, отличающиеся инверсионным преобразованием $\hat{I}$, были физически равноценны, то Ψ и $\hat{I}\Psi$ могут отличаться только фазовым множителем:

$$\hat{I}\Psi = \exp(i\alpha)\Psi \; .$$

Отсюда, аналогично выводу (4), получаем

$$\hat{I}\Psi = \pm\Psi \; ,$$

т.е. волновая функция должна быть либо четной, либо нечетной. Четность состояния сохраняется с течением времени[1]. Она не является формальной величиной (как может показаться на первый взгляд), так как проявляется, например, в запрете процессов с изменением четности, если взаимодействия, ответственные за эти процессы, инвариантны относительно инверсии. Четность сохраняется для сильных и электромагнитных взаимодействий, но, как уже отмечалось выше, инверсионная инвариантность, а следовательно, и закон сохранения четности отсутствуют для слабых взаимодействий. Выдающийся российский физик-теоретик Лев Ландау применил операцию комбинированной инверсии (инверсия плюс замена частиц на античастицы) для формулировки закона

[1] В классической физике такой физической величины нет.

сохранения комбинированной четности. Этот закон выполняется для более широкого круга явлений, однако, Д.Кронин и В.Фитч с сотрудниками (1964) установили, что и этот закон сохранения нарушается при редких распадах K -мезонов. Вместе с тем не подвергается сомнению так называемая CPT-теорема, т.е. инвариантность взаимодействий при комбинированной инверсии и обращении времени.

6. Симметрия и перспективы объединения фундаментальных взаимодействий

Выше уже говорилось о роли симметрии в создании единой теории электрослабых взаимодействий. Ш.Глэшоу и Х.Джорджи (1974) сделали попытку объединения электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий (так называемое Великое объединение). В качестве группы симметрии они рассмотрели наименьшую простую группу $SU(5)$, включающую в себя как $SU(3)$, так и $SU(2)\times U(1)$. В качестве пяти фундаментальных состояний в этой теории выступают три кварка одного аромата, но разного цвета и два лептона (все одного поколения). В этом подходе нет принципиального различия между кварками и лептонами (предполагается, что различие связано со спонтанным нарушением симметрии). Отметим, что нарушение симметрии и разделение сильных и электрослабых взаимодействий при остывании горячей Вселенной должны были произойти, по оценкам, при температурах $T\approx 10^{27}\,K$. Эта теория (и ее разновидности) позволяет объяснить некоторые экспериментальные данные, но ее основной результат - нестабильность протона - до сих пор не подтвержден. Интересным и важным результатом теории $SU(5)$ является невыполнение закона сохранения барионного заряда. Этим можно объяснить преобладание вещества над антивеществом в обозримой части Вселенной.

Таким образом, развитие физики частиц высоких энергий приводит к выводу о том, что с ростом энергии взаимодействующих частиц симметрия фундаментальных взаимодействий повышается, что приводит к их объединению, однако энергии, необходимые для такого объединения, чрезвычайно велики ($10^{14}-10^{15}$ ГэВ). Отсюда родилась гипотеза о том, что в первые мгновения после Большого взрыва законы природы обладали очень высокой степенью динамической симметрии: возможно, три (а может быть, и все четыре) вида фундаментальных взаимодействий были объединены в одно единое взаимодействие. Именно на такое объединение нацелены теории **суперсимметрии и супергравитации.** Суперсимметрия была впервые введена российскими учеными Ю.А.Гольфандом и Е.П.Лихтманом, а затем - Дж.Вессом и Б.Зумино.

Суперсимметрия связывает воедино поля и частицы с разной статистикой (фермионы и бозоны). Кванты входящих в одно суперполе фермионных и бозонных полей называют суперпартнерами. Отличительная особенность преобразований суперсимметрии состоит в том, что они преобразуют не только внутренние характеристики частиц, но и пространственно-временные координаты. Суперсимметрия, таким образом, объединяет геометрическую и внутреннюю симметрию, что придает ей особую красоту. Правда, на настоящей стадии развития Вселенной суперсимметрия могла бы проявляться только как спонтанно-нарушенная симметрия, что приводило бы к существенному различию масс частиц и их суперпартнеров (чем и объясняется отсутствие экспериментальных доказательств существования последних). Энергии, необходимые для создания "счастиц" (суперчастиц), составляют величину порядка 1000 ГэВ. Создание нового поколения ускорителей частиц должно помочь их обнаружению.

Идеи суперсимметрии интенсивно развиваются. С ними связаны, в частности, надежды на полное сокращение расходимостей в квантовой теории поля, являющихся камнем преткновения обычных теорий. Если преобразованиям суперсимметрии придать локальный характер, то получится расширение общей теории относительности, называемое **супергравитацией**. Супергравитация ставит целью объединение всех четырех фундаментальных взаимодействий. Однако теории суперсимметрии и супергравитации еще далеки от своего завершения.

Заключение

Принципы симметрии вносят существенную степень детерминизма, упорядоченности в вероятностное поведение квантовых систем. Они как бы противодействуют хаосу микромира, на них можно опираться при исследовании и теоретическом описании последнего.

Принципы симметрии не только помогают классификации квантовых состояний, установлению законов сохранения и правил запрета, но и обладают эвристической ценностью. С их помощью создаются новые теории, с одной стороны, описывающие явления микромира, а с другой - имеющие важные следствия для космологии. Развитие квантовой теории поля и частиц, как видно из изложенного, происходит по линии повышения симметрии, на которую опирается теория. Группа симметрии в теории электромагнитного поля $U(1)$ является подгруппой группы симметрии электрослабых взаимодействий $SU(2)\times U(1)$, которая в свою очередь является подгруппой группы симметрии Великого объединения $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ и т.д.

Можно привести следующую цепочку подгрупповых связей:

$$E_8 \times E_8 \supset E_6 \supset SU(5) \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1) \supset SU(2) \times U(1) \supset U(1).$$

Первые две используют в теории суперструн и теориях с числом пространственных измерений более трех, об остальных говорилось выше. Таким образом, теоретики, обращаясь к начальным стадиям развития Вселенной, рассматривают все более симметричные варианты квантовой теории поля, однако каждый свой шаг им приходится сопровождать предположением о спонтанном нарушении этой симметрии в развивающемся мире. Иначе говоря, по мере остывания Вселенной, возникшей, вероятно, с очень высокой степенью симметрии, происходило быстрое ее понижение с переходом высших типов в скрытую форму. Причины этого явления остаются неясными. Указывает ли это на несовершенство самого мира или на несовершенство наших знаний о мире? На этот вопрос наука ответа пока не дает.

Удивительной чертой многих видов симметрии является их весьма абстрактно-математический характер. Их описание и использование требует знания высших разделов математики и, прежде всего, методов теории представлений непрерывных групп. Еще Ю. Вигнер отмечал непостижимую эффективность математики при описании явлений природы [5]. Заметим, что это тем более относится к теории групп симметрии. В основе своей мир устроен по законам математики, симметрии, красоты, но причины этого нам неизвестны.

В краткой статье невозможно рассказать о всех важных применениях теории симметрии. Мы не смогли остановиться, например, на симметрии относительно обращения времени, классификации электронных и колебательных состояний молекул и кристаллов, описании фазовых переходов в кристаллах [7-13].

1. См.: *Вейль Г.* Симметрия. М., 1968.
2. См.: *Шубников А.В., Копцик В.А.* Симметрия в науке и искусстве. М., 1972.
3. См.: *Урманцев Ю.А.* Симметрия природы и природа симметрии. М., 1974.
4. См.: *Шеврин Л.Н.* Об эстетичности математики // Изв. УрГУ. 1995. № 4.
5. См.: *Вигнер Ю.* Этюды о симметрии. М., 1971.
6. См.: *Компанеец А.С.* Симметрия в микро- и макромире. М., 1978.
7. См.: *Хейне В.* Теория групп в квантовой механике. М., 1963.
8. См.: *Петрашень М.И., Трифонов Е.Д.* Применение теории групп в квантовой механике. М., 1967.
9. См.: *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М., 1989. Гл.12.
10. См.: *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М., 1986.
11. См.: *Эллиот Дж., Добер П.* Симметрия в физике: В 2 т. М., 1983.
12. См.: *Любарский Г.Я.* Теория групп и физика. М., 1986.
13. См.: *Изюмов Ю.А.*, Сыромятников В.Н. Фазовые переходы и симметрия кристаллов. М., 1984.